

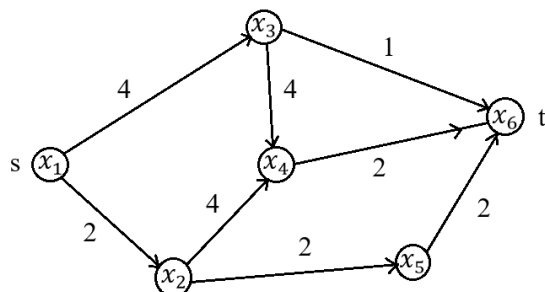
Luồng và Luồng cực đại – Thuật toán đánh dấu Ford-Fulkerson

Biên soạn: Bùi Thế Tâm, 2018

1. Phát biểu bài toán

Cho đồ thị có hướng $G = (V, E)$.

$V = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$, q_{ij} – khả năng thông qua của cung (i, j) , s – điểm phát, t – điểm thu



Hình 1

Tập $\{z_{ij}\}$ gọi là 1 luồng trên các cung (x_i, x_j) nếu thỏa mãn:

$$(1) \sum_{x_j \in \Gamma(x_i)} z_{ij} - \sum_{x_k \in \Gamma^{-1}(x_i)} z_{ki} = \begin{cases} v & \text{nếu } x_i = s \\ -v & \text{nếu } x_i = t \\ 0 & \text{ } x_i \text{ là các đỉnh khác} \end{cases}$$

$$(2) \quad 0 \leq z_{ij} \leq q_{ij}, \quad \forall (x_i, x_j) \in V$$

Bài toán: tìm luồng có giá trị v lớn nhất (v gọi là giá trị của luồng).

Luồng cực đại là một trong những bài toán tối ưu trên đồ thị tìm được những ứng dụng rất rộng rãi trong cả thực tế cũng như trong lý thuyết tổ hợp. Thuật toán giải bài toán được hai nhà toán học Mỹ Lester Randolph Ford và Delbert Ray Fulkerson đề xuất trong tài liệu:

L.R. Ford, Jr. and D.R. Fulkerson (1956). Maximal Flow through a Network. Canadian Journal of Mathematics, 8, 399-404. Link bài: <http://dx.doi.org/10.4153/CJM-1956-045-5>

2. Cơ sở lý thuyết của thuật toán

Định nghĩa 1. Lát cắt (X, Y) , trong đó $X \subset V, Y = V \setminus X$ là tập hợp tất cả các cung (x_i, x_j) mà hoặc là $x_i \in X, x_j \in Y$, hoặc là $x_i \in Y, x_j \in X$. Lát cắt (X, Y) gọi là tách điểm phát s và điểm thu t nếu $s \in X, t \in Y$.

Định nghĩa 2. Khả năng thông qua của lát cắt (X, Y) là số $C(x, y) = \sum_{(i,j)} q_{ij}$ trong đó tổng lấy theo các cung định hướng từ $x_i \in X$ tới $x_j \in Y$. Chú ý, nói chung $C(X, Y)$ khác với $C(Y, X)$. Lát cắt với khả năng thông qua nhỏ nhất gọi là lát cắt hẹp nhất.

Ta có nhận xét: giá trị v của luồng lớn nhất trong mạng không vượt quá khả năng thông qua của mọi lát cắt (X, Y) tách s và t . Từ đó suy ra giá trị của luồng lớn nhất không vượt quá khả năng thông qua của lát cắt hẹp nhất. Định lý sau khẳng định giá trị của luồng lớn nhất đúng bằng khả năng thông qua của lát cắt hẹp nhất.

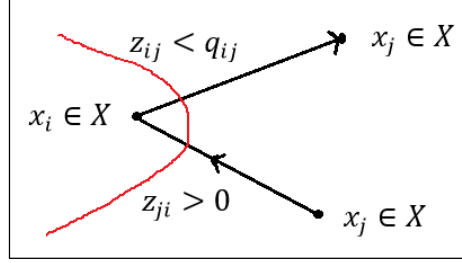
Định lý. Giá trị của luồng lớn nhất từ điểm phát s tới điểm thu t bằng khả năng thông qua của lát cắt hẹp nhất tách s và t .

Chứng minh. Định lý sẽ được chứng minh bằng cách xây dựng được một luồng lớn nhất và lát cắt hẹp nhất.

Đầu tiên ta xuất phát từ 1 luồng $z_{ij} \geq 0$ với mọi i, j thỏa mãn các ràng buộc (1)-(2) (có thể lấy $z_{ij} = 0$ với mọi i, j). Nếu giá trị của luồng này bằng khả năng thông qua của 1 lát cắt nào đó thì luồng có giá trị lớn nhất, định lý được chứng minh. Nếu không ta có thể tăng luồng theo quy tắc dưới đây cho đến khi nào giá trị của luồng bằng khả năng thông qua của 1 lát cắt nào đó.

Giả sử đã có luồng $\{z_{ij}\}$. Ta xây dựng tập X theo quy tắc sau:

1. $s \in X$
2. Nếu $x_i \in X$ và $z_{ij} < q_{ij}$ thì $x_j \in X$.
3. Nếu $x_i \in X$ và $z_{ji} > 0$ thì $x_j \in X$.



Hình 2

Quy tắc 2 và 3 được áp dụng liên tục cho đến khi không áp dụng được nữa thì ta được tập X . Ký hiệu $Y = V \setminus X$, có 2 khả năng xảy ra:

Trường hợp 1: $t \in Y$. Khi đó với mọi cung (x_i, x_j) , $x_i \in X, x_j \in Y$ đều có $z_{ij} = q_{ij}$ (theo quy tắc 2) và với mọi cung (x_j, x_i) , $x_i \in X, x_j \in Y$ đều có $z_{ji} = 0$ (theo quy tắc 3). Do đó

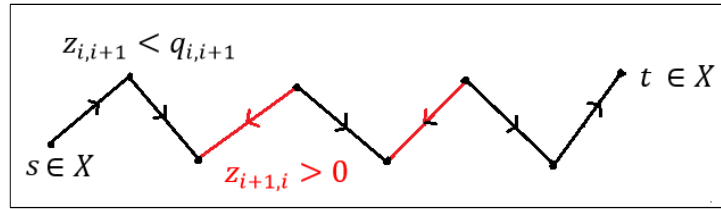
$$\sum_{x_i \in X, x_j \in Y} z_{ij} = \sum_{x_i \in X, x_j \in Y} q_{ij} \text{ và } \sum_{x_i \in X, x_j \in Y} z_{ji} = 0$$

Vậy giá trị của luồng $\{z_{ij}\}$ bằng khả năng thông qua của lát cắt $C(X, Y)$, do đó luồng $\{z_{ij}\}$ là luồng có giá trị lớn nhất.

Trường hợp 2: $t \in X$. Từ cách xác định X suy ra tồn tại 1 đường đi từ s tới t (gọi là đường đi tăng luồng) chẳng hạn

$$(3) \quad s, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, t$$

mà đối với mỗi cung (x_i, x_{i+1}) ta có hoặc $z_{i,i+1} < q_{i,i+1}$ (khi đó cung này gọi là cung thuận), hoặc là $z_{i+1,i} > 0$ (khi đó cung này gọi là cung ngược).



Hình 3

Ký hiệu

$$\varepsilon_1 = \min\{q_{ij} - z_{ij} : \text{theo mọi cung thuận } (x_i, x_j)\}$$

$$\varepsilon_2 = \min\{z_{kl} : \text{theo mọi cung ngược } (x_k, x_l)\}$$

$$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$$

Bây giờ ta điều chỉnh luồng theo đường đi (3) để được luồng mới $\{z'_{ij}\}$:

$$z'_{ij} = z_{ij} + \varepsilon \text{ với } (x_i, x_j) \text{ là cung thuận của (3)}$$

$$z'_{ji} = z_{ji} - \varepsilon \text{ với } (x_j, x_i) \text{ là cung ngược của (3)}$$

$$z'_{ij} = z_{ij} \text{ với mọi } (x_i, x_j) \text{ không thuộc (3)}$$

Luồng mới $\{z'_{ij}\}$ vẫn thỏa mãn (1)-(2) nhưng giá trị của luồng tăng lên 1 lượng bằng ε so với luồng cũ $\{z_{ij}\}$. Ta lặp lại quá trình vừa mô tả đối với luồng mới $\{z'_{ij}\}$.

Giả sử q_{ij} nguyên và ta xuất phát từ luồng $z_{ij} = 0$ với mọi i, j thì sau mỗi lần điều chỉnh luồng, luồng mới tăng giá trị ít nhất là 1 đơn vị. Vì vậy sau 1 số lần điều chỉnh luồng ta phải gặp Trường hợp 1 (tức là xây dựng được luồng lớn nhất và lát cắt hẹp nhất). Định lý được chứng minh.

Từ định lý suy ra luồng $\{z_{ij}\}$ là lớn nhất khi và chỉ khi không còn đường đi tăng luồng.

3. Thuật toán đánh dấu Ford – Fulkerson

Thuật toán bắt đầu từ 1 luồng chấp nhận được nào đó (có thể $z_{ij} = 0$ với mọi i, j) và các đỉnh đều chưa có nhãn. Mỗi đỉnh của mạng sẽ ở 1 trong 3 trạng thái: đỉnh **chưa có nhãn**, **có nhãn nhưng chưa xét**, **có nhãn và đã xét**. Nhãn của 1 đỉnh x_i gồm có 2 phần và thuộc 1 trong 2 dạng sau:

- Dạng 1: $(+x_j, \sigma(x_i))$, có nghĩa là có thể tăng luồng theo cung (x_j, x_i) với lượng lớn nhất là $\sigma(x_i)$.
- Dạng 2: $(-x_j, \sigma(x_i))$, có nghĩa là có thể giảm luồng theo cung (x_i, x_j) với lượng lớn nhất là $\sigma(x_i)$.

Thuật toán gồm có 6 bước:

Bước 1. Đánh dấu đỉnh s bởi nhãn $(+s, +\infty)$, đỉnh s là có nhãn và chưa xét, các đỉnh khác đều chưa có nhãn.

Bước 2. Chọn 1 đỉnh **có nhãn nhưng chưa xét**, chẳng hạn đỉnh x_i với nhãn là $(\pm x_k, \sigma(x_i))$. Đối với đỉnh x_i này ta xét 2 tập hợp:

$$K^+(x_i) = \{x_j: x_j \in \Gamma(x_i), z_{ij} < q_{ij}, x_j \text{ chưa có nhãn}\}$$

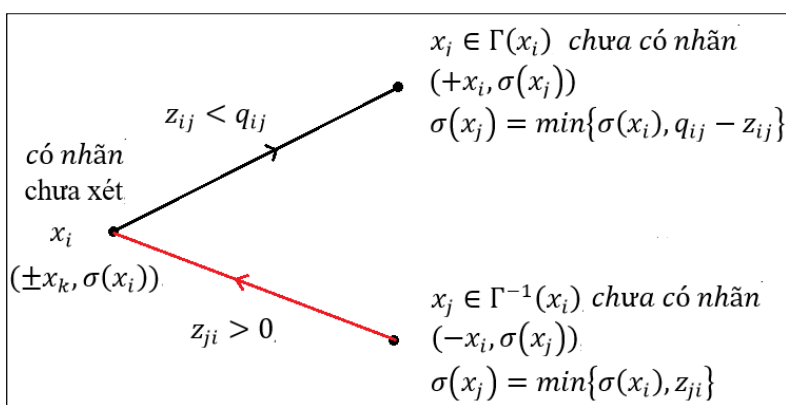
$$K^-(x_i) = \{x_j: x_j \in \Gamma^{-1}(x_i), z_{ji} > 0, x_j \text{ chưa có nhãn}\}$$

Với mỗi $x_j \in K^+(x_i)$ ta sẽ gán cho nó nhãn $(+x_i, \sigma(x_j))$, trong đó

$$\sigma(x_j) = \min\{\sigma(x_i), q_{ij} - z_{ij}\}.$$

Với mỗi $x_j \in K^-(x_i)$ ta sẽ gán cho nó nhãn $(-x_i, \sigma(x_j))$, trong đó

$$\sigma(x_j) = \min\{\sigma(x_i), z_{ji}\}.$$



Hình 4

Bây giờ **đỉnh x_i là có nhãn và đã xét**, còn các đỉnh $x_j \in K^+(x_i)$ và $x_j \in K^-(x_i)$ là đã **có nhãn nhưng chưa được xét**.

Bước 3. Lặp lại Bước 2 cho đến khi nào xảy ra 1 trong 2 trường hợp:

- Đỉnh t được đánh dấu, chuyển sang Bước 4.
- Đỉnh t không có nhãn và không thể đánh dấu tiếp tục được nữa. Khi đó luồng đang xét là luồng cực đại. Nếu ký hiệu X_0 là tập các đỉnh có nhãn, Y_0 là tập các đỉnh không có nhãn thì (X_0, Y_0) sẽ là lát cắt hẹp nhất. Thuật toán dừng.

Bước 4. Đặt $x = t$.

Bước 5. Tiến hành tăng luồng:

- Nếu đỉnh x có nhãn là $(+u, \sigma(x))$ thì tăng luồng theo cung (u, x) từ $z(u, x)$ lên $z(u, x) + \sigma(t)$.

- Nếu đỉnh x có nhãn là $(-u, \sigma(x))$ thì giảm lượng vận chuyển trên cung (x, u) từ $z(x, u)$ xuống còn $z(x, u) - \sigma(x)$.

Bước 6. Nếu $u = s$ thì xóa tất cả các nhãn và quay lại Bước 1 với luồng đã được điều chỉnh ở Bước 5. Nếu $u \neq s$ thì đặt $x = u$ và quay lại Bước 5.